

**Завдання 1.** Відомо, що Кастор (спектральний клас A1) є візуально-подвійною зорею, паралакс якої дорівнює  $0",076$ . Власний рух системи досягає  $0",20$  в рік, а лінія Гідрогену  $H_\alpha = 6563\text{Å}$  в її спектрі зміщена в червоний бік на  $0,066\text{Å}$ . Видимий блиск компонент системи 2,0 та 2,8 зоряної величини, відповідно. Велика піввісь дійсної орбіти спостерігається під кутом  $6",06$ , а період обертання системи дорівнює 306 років. Потрібно:

1. За допомогою карти зоряного неба знайти екваторіальні координати подвійної системи Кастор.
2. Використовуючи рухому карту зоряного неба визначити орієнтовну дату (з точністю до кількох діб) та найбільший інтервал часу протягом ночі (в годинах) спостережень цієї зорі в центральній частині України, виходячи з того, що найкращі результати одержуються під час її спостережень на висоті  $h \geq 25^\circ$  над горизонтом, а зенітна відстань Сонця при цьому  $z \geq 105^\circ$ .
3. Обчислити велику піввісь орбіти і швидкості (в км за секунду) відносного руху меншої компоненти системи по орбіті та просторового руху системи в цілому.
4. Визначити сумарний блиск системи, колір і світність кожної з її компонент та порівняти їх з параметрами Сонця.
5. Побудувати графік залежності маси зорі від її абсолютної зоряної величини M

M	$-7^m$	$-6^m$	$-5^m$	$-4^m$	$-3^m$	$-2^m$	$-1^m$	$0^m$	$+1^m$	$+2^m$
Маса зорі в масах Сонця	20	14	11	8,3	6,46	5,13	4,00	3,09	2,34	1,78

M	$+3^m$	$+4^m$	$+5^m$	$+6^m$	$+7^m$	$+8^m$	$+9^m$	$+10^m$	$+11^m$	$+12^m$
Маса зорі в масах Сонця	1,35	1,05	0,79	0,62	0,48	0,36	0,28	0,21	0,16	0,12

6. Розрахувати маси обох компонент системи.
7. Приймаючи, що температури компонент однакові, визначити відношення їх радіусів.

### Розв'язання

- 1) Кастор – це **зоря  $\alpha$  сузір'я Близнят**.

Екваторіальні координати:  $\alpha = 7^h 31^m 5$   $\delta = 32^\circ 00'$ .

- 2) За допомогою рухомої карти зоряного неба визначено, що це **ніч 10-11 січня**. Зоря знаходиться над горизонтом на висоті  $h \geq 25^\circ$  приблизно 14 годин, Сонце на  $Z \geq 105^\circ$  перебуває впродовж  **$\sim 11$  годин**. Таким чином, найдовший інтервал найбільш сприятливих спостережень буде **10-11 січня тривалістю  $\sim 11$  годин**.

- 3) Велика піввісь орбіти  $a = r \cdot \text{tg}(6",06) = \frac{1}{0",076} \text{tg} \frac{6,06}{3600} \cdot 3,26 \text{ св.р.} = \underline{12 \cdot 10^9 \text{ км} = 80 \text{ а.о.}}$ ;

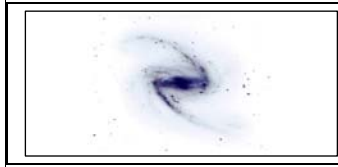
$$V_{\text{орб.}} = \frac{2\pi a}{P} = \underline{8 \text{ км/с}},$$

$$V_{\text{системи}} = \sqrt{V_t^2 + V_r^2}. \quad V_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = 3 \text{ км/с}, \quad V_t = 4,74 \frac{\mu''}{\pi''} = \frac{0,20}{0,076} \times 4,74 = 12,47 \text{ км/с}.$$

$$\underline{V_{\text{системи}} = 12,83 \text{ км/с} \approx 13 \text{ км/с}}.$$

- 4) **Колір обох компонент білий**. Для визначення сумарної зоряної величини системи треба використати формулу Погсона.

$$m_\Sigma - m_2 = -2,5 \lg \left( \frac{E_1 + E_2}{E_2} \right) = -2,5 \lg \left( 1 + \frac{E_1}{E_2} \right)$$



$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{-0,4(m_1 - m_2)}$$

$$m_{\Sigma} = m_2 - 2,5 \lg(1 + 10^{0,4(m_1 + m_2)})$$

Тоді: сумарний блиск  $m_{\Sigma} = -2,5 \cdot \lg E = 1,58$  зоряної величини. Для визначення світності зорі L спочатку оцінити її абсолютну зоряну величину M:

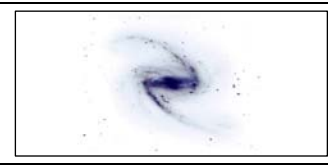
$M = m + 5 + 5 \cdot \lg \pi$ ". Тоді:  $M_1 = 1,40$  зоряної величини,  $M_2 = 2,21$  зоряної величини. Світність кожної зорі, в порівнянні зі світністю Сонця, можна знайти за формулою Погсона,  $\Delta M = M_* - M_{\odot} = -2,5 \lg \frac{L_*}{L_{\odot}}$ , або  $\lg \frac{L_*}{L_{\odot}} = 0,4(M_{\odot} - M_*)$ .  $M_{\odot} = 4,84$  зоряних величин.

Звідси:  $L_1 \approx 24 L_{\odot}$ ,  $L_2 \approx 11,5 L_{\odot}$ .

- 5) Побудований графік за даними таблиці.  
6) Щоб визначити маси компонент потрібно скористатися побудованим графіком залежності маси зорі від її абсолютної зоряної величини M. Тому знаходимо:  $m_1/m_{\odot} = 2,14$ ,  $m_2/m_{\odot} = 1,69$ , тобто:

$$\underline{m_1 = 2,14 m_{\odot}}, \quad \underline{m_2 = 1,69 m_{\odot}}, \quad \underline{m_1 = 4,26 \cdot 10^{30} \text{ кг}}, \quad \underline{m_2 = 3,36 \cdot 10^{30} \text{ кг}}.$$

7)  $\frac{L_1}{L_2} = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$ ,  $T_1 \approx T_2$ . Тоді:  $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{24}{11,5}} \approx \underline{1,45}$ .  $R_1 = 1,45 R_2$ .



**Завдання 2. Місяць.** В одну із дат 2008 року, в Ужгороді спостерігали Місяць в момент верхньої кульмінації на висоті  $h_{\text{вк}}$ . Знаючи, що на цей момент Місяць був у площині небесного екватора, визначити:

- \*Кут  $h_{\text{вк}}$  на цей момент (привести відповідний рисунок).
- а) Скільки часу пройшло від вказаного моменту до верхньої кульмінації Місяця в Нью-Йорку?  
б) На скільки раніше від вказаного моменту Місяць зійшов у Харкові?  
в) На скільки пізніше від вказаного моменту Місяць зайшов у Парижі?
- Яке число обертів навколо своєї осі зробив Місяць відносно Сонця до того, як на ту ж дату в 2012 році він знову був у верхній кульмінації в Ужгороді?
- Скільки разів Місяць перетнув площину меридіана Ужгорода до того, як на ту ж дату в 2012 році він знову був у верхній кульмінації в Ужгороді?
- \*В яких із цих чотирьох міст протягом року Місяць у верхній кульмінації опускався нижче  $h_{\text{вк}} = 12^\circ$ , а в яких із них піднімався вище значень  $h_{\text{вк}} = 69^\circ 30'$ ?
- З якої найменшої географічної широти на земній поверхні можливо бачити (без врахування рефракції та паралаксу) Місяць над горизонтом більше 48 годин неперервно? (зобразити графічно)
- \*Де і на скільки кутовий діаметр Місяця більший: якщо він знаходиться близько до зеніту, чи на горизонті? (показати на рисунку)
- На Місяці "в профіль" видно гору, що виступає на  $0",4$  над диском. Яка висота цієї гори в км?
- В день 16 квітня 1934 року (за григоріанським календарем) почався 1353 рік мусульманської ери. Який номер року (за мусульманським календарем) буде 16 квітня 2012 року?

Пункт спостережень	Географічна довгота	Географічна широта
Харків	$36^\circ 15'$ сх.д.	$50^\circ 00'$ пн.ш.
Ужгород	$22^\circ 18'$ сх.д.	$48^\circ 37'$ пн.ш.
Париж	$2^\circ 21'$ сх.д.	$48^\circ 51'$ пн.ш.
Нью-Йорк	$74^\circ 00'$ з.д.	$40^\circ 43'$ пн.ш.

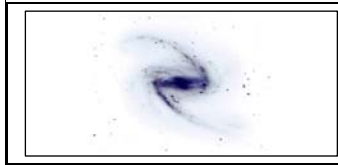
- \* **Примітка:** Завдання виконувати для центру диску Місяця (без врахування рефракції). При розгляді питань на кульмінацію врахувати паралакс Місяця.

### Розв'язання

- Місяць в площині екватора (геоцентричне схилення  $\delta_r = 0^\circ$ ). Видиму висоту у верхній кульмінації  $h_{\text{вк}}$  в пункті на широті  $\varphi$  визначають за формулою:  $h_{\text{вк}} = 90 - \varphi + \delta_r$ , де  $\delta_r$  – топоцентричне схилення Місяця, яке, через відносно невелику відстань Місяця до Землі ( $r = 384400$  км), відрізняється від  $\delta_r$  на кут  $\theta$ , зумовлений паралаксом. З трикутника "центр Землі – пункт спостережень – Місяць" можна знайти кут  $\theta$  і відняти його від  $\delta_r$ . У випадку кульмінації  $\theta \approx p_0 \sin \varphi$ , де  $p_0 = 57'$  – паралакс Місяця. Тому близьке до дійсного значення  $\delta_r$  буде:  $\delta_r = \delta_r - p_0$ . Тоді:

$$h_{\text{вк}} = 90^\circ - \varphi - p_0 = 90^\circ - 48^\circ 37' - 57' = \underline{40^\circ 26'}$$

Відповідаючи на питання 2-3, врахувати, що сидеричний період обертання Місяця навколо Землі  $T_{\text{Мсид}} = 27,32166$  діб, а Земля за добу (1440 хв) повертається на кут  $360^\circ + 365.2422/366.2422 = 360,985647^\circ$ . Кутові швидкості обертання (в  $^\circ/\text{хв}$ ) Землі та



Місяця:  $\omega_3=0,2506845^\circ/\text{хв}$ ,  $\omega_M=0,00915025^\circ/\text{хв}$ , а результуюча кутова швидкість їх одночасного руху  $\omega_p$  (обидва обертання здійснюються в одному напрямку)

$$\omega_p = \omega_3 - \omega_M = 0,24153423^\circ/\text{хв}.$$

Надалі врахувати різниці довгот  $\Delta l$  між пунктами та той факт, що внаслідок добового обертання Землі, при заданих умовах ( $\delta_r \approx 0^\circ$ ), Місяць після сходу і до кульмінації в пункті зміщується на кут  $90^\circ$ , а з моменту кульмінації і до заходу – теж на кут  $90^\circ$ . Інтервали часу обчислюються за формулами:  $\Delta t = \Delta l / \omega_p$  або  $\Delta t = (\Delta l + 90^\circ) / \omega_p$ .

- а) **В Нью-Йорку** Місяць кульмінував **на 399 хвилин (6 годин 39 хвилин) пізніше**, ніж він кульмінував в Ужгороді.

б) **В Харкові** Місяць зійшов **на 430 хвилин (7 годин 10 хвилин) раніше**, ніж він кульмінував в Ужгороді.

в) **В Парижі** Місяць зайшов **на 455 хвилин (7 годин 35 хвилин) пізніше**, ніж він кульмінував в Ужгороді.
- За чотири роки (1461 сонячна доба) Місяць зробить **49,48 обертів** відносно Сонця.
- За чотири роки (1465 зоряних діб) Місяць зробить **53,47 обертів навколо Землі**, а тому він перетне меридіан Ужгорода  $2 \cdot 1465 - 53 \cdot 2 =$  **2824 рази**.
- Нахил площини екліптики до площини екватора  $23^\circ 27'$ , а площини орбіти Місяця до площини екліптики  $5^\circ 09'$ . Звідси,  $\delta_r$  Місяця впродовж його повного оберту навколо Землі змінюється в межах від  $\delta_{\min} = -28^\circ 36'$  до  $\delta_{\max} = +28^\circ 36'$ . В момент верхньої кульмінації  $h_{\text{вк}} = 90 - \varphi + \delta_r$ . Мінімальні  $h_{\text{вк}}$  Місяця будуть при  $\delta_{\min}$ , а максимальні при  $\delta_{\max}$ . Тому протягом року висота верхньої кульмінації Місяця  **$h_{\text{вк}} < 12^\circ$  буває в Харкові, Ужгороді та Парижі, а в Ужгороді та Нью-Йорку вона може досягати значень  $h_{\text{вк}} > 69^\circ 30'$** .
- В деякі періоди року Місяць можливо бачити над горизонтом більше ніж упродовж 48 годин при його спостереженнях на географічній широті  $\varphi \geq 90^\circ - 28^\circ 36' = 61^\circ 24'$ .
- Кутовий діаметр Місяця **більший в zenіті через різницю у відстанях** до нього в zenіті і горизонті – на 1,7%
- За відомими кутом та відстанню до Місяця знайдемо висоту гори  **$H = 745$  м**.
- Необхідно знати, що синодичний період зміни фаз Місяця  $P_{\text{син}} = 29$  діб 12 годин 44 хвилини, а в мусульманському календарі рік містить 12 синодичних місяців, які почергово мають тривалість 29 або 30 днів; тому початок їхнього року може припадати на будь-який із місяців. Тривалість року складає 354 дні. Існує і таке поняття, як високосний рік, який містить 355 днів. В арабському циклі із 30 років, 19 років простих та 11 високосних, тобто 10631 день. Врахувавши це знайдемо, що за 78 григоріанських років в мусульманському календарі набігло 80 років і 140 днів. Тому в квітні 2012 року за мусульманським календарем буде  $1353 + 80,4 =$  **1433,4 рік**